筑波大学理工学群社会工学類

平成30年度

編入学試験

学力検査問題

(数学)

【注意事項】

1. 試験開始の合図があるまで，この問題の中身を見てはいけません．

2. すべての解答用紙（罫紙）と下書き用紙の定められた欄に，志望する「学群・学類」，「氏名」,「受験番号」をすべて記入すること．

3. 問題は6問あります．問題ごとにそれぞれ別の解答用紙を使用すること．

4. 解答用紙の裏面を使用しても構いません．

5. 解答用紙上部の細長い四角の枠内に問題番号を記入すること．

6. 試験終了後，解答用紙と下書き用紙を別々に集めます．問題冊子は持ち帰ってください．

問題 1 以下の問に答えよ.

(1) n 次正方行列 $A=(a_{ik})$ において，第 i 行，第 k 列を取り去って得られる $(n-1)$ 次行列式に符号 $(-1)^{i+k}$ をつけたものを A の第 (i,k) 余因子といい，Δ_{ik} により表す．このとき，以下の問に答えよ．

(1a) A の行列式 $|A|$ を第 (n,k) 余因子（$k=1,\ldots,n$）を使って表せ．

(1b) A の逆行列 A^{-1} の第 (i,k) 成分を A の行列式と余因子により表せ．

(2) A を n 次正方行列，D を m 次正方行列とする．また，$O_{m,n}$ を (m,n) 次の零行列，I_n, I_m をそれぞれ n 次と m 次の単位行列とする．A が正則であるとき，行列の積 $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n & -A^{-1}B \\ O_{m,n} & I_m \end{bmatrix}$ を求め，それから，$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ の行列式を求めよ．

(3) A, B, C を n 次正則行列，O_n を n 次零行列とするとき，$2n$ 次行列 $\begin{bmatrix} A & B \\ O_n & C \end{bmatrix}$ の逆行列を求めよ．

問題 2 $S=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ とする．このとき，以下の問に答えよ．

(1) S の固有値をすべて求めよ．

(2) S の固有値に対応する固有ベクトルをすべて求めよ．

(3) S の固有値に対応する固有ベクトルを並べて得られる直交行列 P を一つ示せ．

(4) (3) の直交行列 P に対して，P^TSP を求めよ．ただし，P^T は P の転置行列である．

問題 3 関数 f を

$$f(x)=\begin{cases} x^3\sin\dfrac{1}{x^2} & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$$

とする．このとき，以下の問に答えよ．

(1) f が原点 $x=0$ で連続である．その理由を答えよ．

(2) f の原点 $x=0$ 以外の導関数を求めよ．

(3) f の原点 $x=0$ での微分係数を定義に従って求めよ．

(4) f の導関数 f' が原点 $x=0$ で連続かどうかを，その理由とともに答えよ．

問題 4 以下の関数を積分せよ．ただし，k は整数であり，積分定数は省略してよい．

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$

(2) $\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

(3) $\dfrac{1}{\sin x}$

(4) $x^k \ln x$

問題 5 サイコロを 2 個投げて出た目の大きい方を X，小さい方を Y とする．ただし，同じ目が出たときは，$X = Y$ とする．このとき，以下の問に答えよ．

(1) 確率 $P(X \geq 5)$ 及び $P(Y \leq 1)$ を求めよ．

(2) 条件付き確率 $P(Y \leq 1 \mid X \geq 5)$ を求めよ．

(3) X の期待値 $E[X]$ を計算せよ．

(4) $E[XY] - E[X]E[Y]$ を計算せよ．

問題 6 $E_1, \ldots, E_n$ を互いに排反で網羅的な事象とし，各事象 E_k が生起する確率を θ_k とする．今，実験を m 回独立に試みたとき，事象 E_k が観測される度数を x_k とすると，$(x_1, \ldots, x_n)$ が実現する確率 $P(x_1, \ldots, x_n)$ は多項分布により求められる．ここで，$m = x_1 + \cdots + x_n$ である．$\theta_1, \ldots, \theta_n$ が既知であるとき，サンプル $(x_1, \ldots, x_n)$ が多項分布に従う母集団からとられたという帰無仮説は次の統計量

$$S = \sum_{k=1}^{n} \frac{(x_k - m\theta_k)^2}{m\theta_k}$$

で検定できる．m が十分大きいときは，統計量 S は自由度 $n-1$ のカイ 2 乗分布に従う．自由度 $n-1$ のカイ 2 乗分布の $100\alpha\%$ 有意水準点を $\chi^2(n-1, \alpha)$ により表すとする．このとき，以下の問に答えよ．

(1) 上記の問題において，5% 有意水準で帰無仮説が棄却される条件を式で示せ．

(2) サイコロを 120 回投げ，出た目の度数を数えたとき，下表のようになったとする．

出た目	1	2	3	4	5	6	計
度数	15	19	23	20	21	22	120

このとき，サイコロが偏っていないという帰無仮説が 5% 有意水準で棄却されないという条件を式で示せ．

(3) ランダムに選ばれた 800 個の材料のうち 400 個に処理 1（事象 A）を，残りの 400 個に処理 2（事象 $\overline{A}$) を行った．さらに，これらの材料の強度試験を行ったところ，もろい（事象 B) ともろくない（事象 $\overline{B}$) という 2 種類に下表のように分離された．

	もろい	もろくない
処理 1	77	323
処理 2	177	223

この問題では，$n = 4, m = 800$ となるが，各事象が生起する確率 $P(A), P(B)$ は未知である．そこで，観測された度数の割合で求められる値を $P(A), P(B)$ の推定量として置き換えて計算する．このとき，統計量 S は m が十分に大きいならば，自由度 1 のカイ 2 乗分布に従う．材料の処理と強度とは独立であるという帰無仮説が 5% 有意水準で棄却されるという条件を式で示せ．