平成 28 年度学群編入学試験

理工学群数学類

学　力　検　査
（専門科目）
問　題　冊　子

注意事項

① 問題Ｉ～Ｖの全問題について解答すること。
② 各問題につき解答用紙は 1 枚である。解答が書ききれない場合には、「裏へ」と明記して、その解答用紙の裏面に続けて書くこと。
③ 下書き用紙は採点しない。
④ 試験時間は 120 分です。

問題 I n 次正方行列 A と B の交換子 $[A,B]$ を $AB-BA$ と定義する．次を示せ．
ただし O は零行列を表すものとする．

(1) $[A,[B,C]]+[B,[C,A]]+[C,[A,B]]=O$.

(2) A と B が交代行列ならば，$[A,B]$ も交代行列である．

(3) A と $[A,B]$ が可換ならば，任意の正整数 n に対して $[A^n,B]=n[A,B]A^{n-1}$ である．

問題 II V は実係数の 4 次以下の多項式の全体

$$V=\left\{a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3 \;\middle|\; a_0,a_1,a_2,a_3\in\mathbb{R}\right\}$$

とする．V は $1,x,x^2,x^3$ を基底とする実ベクトル空間になることが知られている．
さて，線形変換 $T:V\to V$ を

$$(Tp)(x)=(1-x^2)\frac{d^2p}{dx^2}(x)-2x\frac{dp}{dx}(x)+12p(x),\quad p\in V$$

によって定義する．次の問いに答えよ．

(1) V の基底 $1,x,x^2,x^3$ に対する T の表現行列を求めよ．

(2) $\operatorname{rank}T$ を求めよ．

(3) $\ker T$ を求めよ．

問題 III n は 1 以上の整数とする．2 変数関数

$$f(x,y)=\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(i-x)^2}{y}+n\log y\qquad(-\infty<x<\infty,\ y>0)$$

について，次の問いに答えよ．

(1) 等式

$$\sum_{i=1}^{n}(i-x)^2=n(\mu-x)^2+n\delta$$

が成り立つことを示せ．ただし，$\mu=\dfrac{n+1}{2}$, $\delta=\dfrac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(i-\mu)^2}{n}$ である．

(2) $f(x,y)$ の最小値を求めよ．

問題 IV 次の重積分を求めよ.

$$(1)\quad \iint_D ye^{xy}dxdy, \qquad D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq 1\right\}.$$

$$(2)\quad \iint_D \frac{x}{x^2+y^2}dxdy, \quad D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; 1\leqq x^2+y^2\leqq 4,\ 0\leqq y\leqq x\right\}.$$

問題 V f を実数全体で定義された実数値関数とする.

(1) 「f は至るところ連続である」という定義を述べよ.

(2) 「f は一様連続である」という定義を述べよ.

(3) 関数 $f(x)=\sin x$ は一様連続であることを証明せよ.

(4) 関数 $f(x)=x^2$ は一様連続でないことを証明せよ.