筑波大学理工学群社会工学類

平成28年度

編入学試験

学力検査問題

(数学)

【注意事項】

1. 試験開始の合図があるまで，この問題の中身を見てはいけません．

2. すべての解答用紙と下書き用紙の定められた欄に，志望する「学群・学類」，「氏名」，「受験番号」をすべて記入すること．

3. 問題は6問あります．問題ごとにそれぞれ別の解答用紙（罫紙）を使用すること．

4. 解答用紙の裏面を使用しても構いません．

5. 解答用紙上部の細長い四角の枠内に問題番号を記入すること．

6. 試験終了後，解答用紙と下書き用紙を別々に集めます．問題冊子は持ち帰ってください．

問題1 $\mathbb{R}^3$ を3次元実ベクトル空間とし，次の2つの基底（横ベクトル表示）を考える．

$$E = \{e_1 = (1,0,0)\,, e_2 = (0,1,0)\,, e_3 = (0,0,1)\}\,,$$
$$S = \{s_1 = (1,0,1)\,, s_2 = (2,1,2)\,, s_3 = (1,2,2)\}\,.$$

このとき，以下の問に答えよ．

(1) 基底 S から基底 E へ変換する行列 P を求めよ．

(2) $[v]_E$ および $[v]_S$ をベクトル v の基底 E および S による横ベクトル表示とする．$[v]_E = (1,3,5)$ であるとき，$[v]_S$ を求めよ．

(3) A および B を 3×3 の行列とする．任意の $[v]_E$ に対して $[v']_E$ が $[v']_E = [v]_E A$ により決められるとき，$[v']_S = [v]_S B$ となる行列 B を P ,P^{-1} および A を用いて表せ．

問題2 $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ とする．このとき，以下の問に答えよ．

(1) A の固有値をすべて求めよ．

(2) A の独立な固有ベクトルをすべて求めよ．

(3) A は対角化可能であるかどうかを示せ．もし A が対角化可能ならば，$P^{-1}AP$ が対角行列になるような P を求めよ．

問題3 関数 $f(x)$ が次式で与えられているとする．

$$f(x) = \begin{cases} x^n \sin\frac{1}{x} & (x \neq 0)\,, \\ 0 & (x = 0)\,. \end{cases}$$

このとき，以下の問に答えよ．

(1) $n = 2$ のとき，$x = 0$ において f は微分可能であるかを示せ．

(2) $n = 2$ のとき，$f'(x)$ は $x = 0$ で連続であるかどうかを示せ．

(3) $n = 3$ のとき，$f'(x)$ は $x = 0$ で連続であるかどうかを示せ．

問題 4 関数 $f(x)$ と f の定義域に含まれる区間 $[0,1]$ を考える.

$$x_i = \frac{i}{n} \quad (i = 0, 1, \ldots, n)$$

で与えられる区間 $[0,1]$ の分割に対して,

$$I_k = (x_{k-1}, x_k] \quad (k = 1, \ldots, n)$$

とし, 次の和を定義する.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \sup_{x \in I_k} f(x),$$
$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \inf_{x \in I_k} f(x)$$

この S_n, s_n がそれぞれ $n \to \infty$ において極限を持つとき,

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n,$$
$$s = \lim_{n\to\infty} s_n$$

とする. $S = s$ ならば関数 f が区間 $[0,1]$ で積分可能であるといい,

$$S = s = \int_0^1 f(x)\,dx$$

と書く. このとき、以下の問に答えよ.

(1) $f(x) = x$ とするとき, (a) S_n, s_n を求め, (b) f が $[0,1]$ 上で積分可能かどうかを示せ.

(2) 以下の関数 f が $[0,1]$ 上で積分可能かどうかを示せ.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & (x \text{ が無理数}), \\ x & (x \text{ が有理数}). \end{cases}$$

ただし、$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$ である.

問題5 確率 p で成功し，確率 $1-p$ で失敗する独立な実験を n 回繰り返す． X_i は i 回目の実験が成功したときに $X_i=1$，失敗した時に $X_i=0$ となる確率変数とする．このとき，以下の問に答えよ．

(1) 「確率変数 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ が独立である」ことの定義を述べよ．

(2) 確率変数 Y が確率 $p_1, p_2, \ldots, p_n$ で値 $y_1, y_2, \ldots, y_n$ をとるとき， その期待値を μ，分散を σ^2 とする． このとき任意の実数 λ に対して， 「$|Y-\mu|>\lambda\sigma$ となる」確率 $P(|Y-\mu|>\lambda\sigma)$ は以下の不等式をみたすことを， 分散 σ^2 の定義を変形することにより示せ．

$$P(|Y-\mu|>\lambda\sigma) \leq \frac{1}{\lambda^2}.$$

(3) (2) で得られた不等式を用いて， 成功確率が 0.5 の独立な試行を n 回行った時，「成功割合が 40% 以上で，かつ 60% 以下となる」確率が 0.99 以上となるような n の下限（すなわち最低限必要な実験回数）を示せ．

問題6 確率変数 Z が x 以上になる確率を $P(Z \geq x)$ と書くとき， $0 \leq \alpha \leq 1$ をみたす α に対して Z の $100\,(1-\alpha)$ パーセント点 z_α は

$$P\,(Z \geq z_\alpha) = \alpha$$

で定義される．特に Z が標準正規分布に従うとき，z_α の具体的な値は 次表で与えられる．

α	0.100	0.050	0.025	0.010	0.005
z_α	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576

また，期待値 μ，分散 σ^2 の正規分布を $N(\mu, \sigma)$ で表すとする． このとき，以下の問に答えよ．

(1) 期待値 μ，分散 σ^2 が未知の $N\,(\mu, \sigma)$ に従う母集団からとった n 個の標本に対して， 標本平均と標本分散をそれぞれ $\bar{x}$ と s^2 とする． このとき，$\sqrt{n}\dfrac{(\bar{x}-\mu)}{s}$ は t 分布に従う． t 分布の $100\,(1-\alpha)$ パーセント点を $t_{n-1;\alpha}$ とするとき， μ の $100\,(1-\alpha)$ パーセント信頼区間を示せ．

(2) $N\,(\mu, \sigma)$ に従う母集団から大きさ 4 の標本を選んだところ， 観測値は 12.7, 13.0, 13.3, 13.0 であったとする．以下の (a), (b) の場合に μ の 95% 信頼区間を求めよ．

(a) $\sigma^2 = 0.16$ であることがわかっている場合

(b) σ^2 が未知である場合（ただし，$t_{n-1;\alpha}$ は z_α に等しいと仮定する）