

平成 28 年度
筑波大学 推薦入試

理工学群 数学類

小論文の試験問題

平成 27 年 11 月 26 日(木)

試験時間 120 分

注意

- 試験問題は 3 題ある。3 題とも解答せよ。
- 試験問題 1 題ごとに解答用紙を 1 枚使用し、左上に問題番号を明記せよ。
- 解答用紙が不足する場合には「裏へ」と明記して裏面を使用してもよい。
- 解答用紙の表裏ともに上部 5cm 程度の部分には何も書き込まないこと。

問題 I 次の問いに答えよ.

(1) $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ に対して,

$$\frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x$$

となることを示せ.

(2)

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R^a \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R \sin x} dx = 0$$

となる実数 a の範囲を求めよ.

問題 II 次の問いに答えよ.

(1) a, b, A, B は実数で, $a \neq b$ とする. 等式

$$\frac{1}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}$$

が, a, b 以外のすべての実数 x について成り立つとき, A, B を a, b を用いて表せ.

(2) $1, 2, 3, 7$ 以外の実数 x に対して,

$$f(x) = \frac{2}{(x-1)(x-3)} + \frac{4}{(x-7)(x-3)} - \frac{5}{(x-7)(x-2)}$$

とおく. $f(x) < 0$ となる x の範囲を求めよ.

(3) (2) で求めた範囲に, $|f(x)|$ が 2016 以下の自然数になるような x はいくつあるか.

問題 III n, m, N を自然数とする. 次の問いに答えよ.

(1) $C_n = 2 \int_0^1 x \sin(n\pi x) dx$ を求めよ.

(2) 次を示せ.

$$\int_0^1 \sin(n\pi x) \sin(m\pi x) dx = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ \frac{1}{2} & (m = n) \end{cases}$$

(3) 次を示せ.

$$\int_0^1 \left\{ x - \sum_{n=1}^N C_n \sin(n\pi x) \right\}^2 dx = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N C_n^2$$

(4) $\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} \leq \frac{\pi^2}{6}$ を証明せよ.