

# 筑波大学理工学群応用理工学類

## 平成28年度個別学力検査(後期日程)

### 小論文問題

#### 注意事項

- 1) 試験開始の合図があるまでこの問題冊子の中を見てはならない。
- 2) この冊子には、[問題Ⅰ] から [問題Ⅲ] まで3題の問題がある。
- 3) 解答用紙6枚と下書き用紙6枚の定められた欄に、受験する「学群、学類」、「氏名」、「受験番号」を記入すること。
- 4) すべての解答用紙上部の  内に問題番号を記入すること。ただし、下の表のように各問題にそれぞれ2枚ずつの解答用紙を使用せよ。白紙の解答用紙も回収する。

問題番号	解答用紙
問題Ⅰ	2枚
問題Ⅱ	2枚
問題Ⅲ	2枚

- 5) 解答が書ききれない場合には、裏面を使用しても差し支えない。

問題 I

$x \geq 0$  で定義された関数  $f(x) = e^{-x} |\sin x|$  と  $g(x) = e^{-x} \cos x$  を考える。

$n$  を自然数として、以下の問いに答えよ。

- (1)  $S_n = \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} f(x) dx$ ,  $T_n = \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} g(x) dx$  とおくと、 $n$  が奇数と偶数の場合について、それぞれ  $S_n$  と  $T_n$  を求めよ。

- (2) (1) の結果を利用して、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{n\pi} f(x) dx$  と  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{n\pi} g(x) dx$  を求めよ。

## 問題 II

関数  $f(x) = 2x - x^2$  を用いて、次のように定めた数列  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  を考える。

$$0 < a_1 < 1, \quad a_{n+1} = f(a_n), \quad b_n = \frac{1 - a_{n+1}}{1 - a_n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

以下の問いに答えよ。

- (1) すべての自然数  $n$  に対し、 $0 < a_n < 1$  が成り立つことを数学的帰納法により示せ。
- (2) すべての自然数  $n$  に対し、 $a_n < a_{n+1}$  が成り立つことを示せ。
- (3)  $0 < b_1 < 1$  が成り立つことを示せ。
- (4) すべての自然数  $n$  に対し、 $b_n > b_{n+1}$  が成り立つことを示せ。
- (5) すべての自然数  $n$  に対し、 $1 - a_{n+1} \leq b_1(1 - a_n)$  が成り立つことを示せ。
- (6)  $\{a_n\}$  が収束することを示し、その極限値を求めよ。

### 問題 III

$a$ を正の実数とする。複素数平面上で  $\bar{z} = 2|z - 2a| - z$  を満たす点  $z$  全体の表す図形を  $C$  とする。ただし、 $i$  は虚数単位であり、 $\bar{z}$  は  $z$  の複素共役である。以下の問いに答えよ。

- (1) 実数  $x, y$  を用いて  $z = x + yi$  と表すとき、 $C$  の方程式を  $x, y$  および  $a$  を用いて表せ。
- (2)  $p$  を実数とし、 $p > a$  とする。複素数平面上で  $|z + a| = |z - p|$  を満たす点  $z$  全体の表す図形を  $D$  とする。 $C$  と  $D$  が一つだけ共有点を有し、その点で接するとき、 $p$  を  $a$  を用いて表せ。
- (3)  $p$  を(2)で求めた値とする。点  $p$  を中心とし、 $D$  と接する円を  $E$  とする。次に、 $E$  上の点  $z$  を  $w = \frac{10i}{z}$  に代入して得られる点  $w$  全体の表す図形を  $F$  とする。 $F$  と  $D$  が一つだけ共有点を有し、その点で接するとき、 $a$  の値を求め、 $F$  の方程式を求めよ。
- (4)  $p$  と  $a$  を、(2)と(3)で求めた値とする。点  $w$  が  $F$  上を動くとき、点  $p$  と点  $w$  を結ぶ線分の中点  $w'$  はどのような図形を描くか。