平成２９年度

理工学群　数学類
推薦入試

小　論　文
試　験　問　題

注意事項

①　試験時間は１２０分です。全部で３問あり、すべてに解答してください。

②　問題ごとに解答用紙１枚ずつを使用し、各解答用紙の左上に問題の番号を明記してください。

③　解答が書ききれない場合は、「裏へ」と明記した上で、その解答用紙の裏面に続けて書いてください。ただし、上部は５，６㎝程あけてください（採点時には隠れてしまいます）。

問題 I　次の条件によって数列 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ を定める．

$$a_n = 1 + \int_0^{\frac{n\pi}{2}} \sin x dx \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$
$$b_0 = 1,\ b_{n+1} = 2(b_n)^{a_n} \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$
$$c_n = \log_2 b_n \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

(1) a_0, a_1, a_2, a_3 を求めよ．

(2) b_1, b_2, b_3 を求めよ．

(3) c_{4m} $(m = 1, 2, 3, \cdots)$ を m を用いて表せ．

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{4m} c_n$ $(m = 1, 2, 3, \cdots)$ を m を用いて表せ．

問題 II　次の問いに答えよ．

(1) 1 でない正の数 a, b と，正の数 c について成り立つ底の変換公式

$$\log_a c = (\log_a b)(\log_b c)$$

を証明せよ．

(2) $x \geqq 0$ のとき，不等式 $\log_{10}(1 + x) \leqq \dfrac{x}{2}$ が成り立つことを示せ．ただし，自然対数の底 e について，$2 < e < 3$ であることを使ってよい．

(3) $(1002)^n$ が 2017 桁の整数となるような正の整数 n をすべて求めよ．

問題 III　関数 $f(x)$ は $0 \leqq x \leqq 1$ で $f(x) \geqq 0$ かつ連続で，$f(0) = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ を満たすとする．

(1) 等式

$$\int_0^1 x^2 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx - 2\int_0^1 x\left(\int_0^x f(t)dt\right)dx$$

が成り立つことを示せ．

(2) $0 < t \leqq x \leqq 1$ を満たすすべての x, t について，条件

$$f(t) \geqq f(0) + \frac{f(x) - f(0)}{x}t$$

が成り立つとき，不等式

$$\int_0^1 x^2 f(x)dx \leqq \frac{1}{2}\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^3$$

が成り立つことを示せ．

(3) $0 < t \leqq x \leqq 1$ を満たすすべての x, t について，条件

$$f(t) \geqq f(0) + \frac{f(x) - f(0)}{x}t$$

が成り立つとする．このとき等式

$$\int_0^1 x^2 f(x)dx = \frac{1}{2}\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^3$$

を満たす関数 $f(x)$ を求めよ．